Tentamen Complexe Analyse
09/11/10, 14.00–17.00 uur

1. Definieer voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $\sin z \neq 0$ de functie

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{\sin z}.$$

   (a) Ga na waar $f(z)$ polen bezit. Bepaal de orde van deze polen en hun residu. Wat valt er te zeggen over $z = 0$?

   (b) Toon aan dat $f(z)$ samenvalt met een machtreeks rond $z = 0$ en bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.

2. Voor $z \in D$ met $D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2 \}$ definieer de functie

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{z+3}.$$

Toon aan dat $|f(z)|$ een maximum heeft in D en bepaal dit maximum. Geef duidelijk aan van welke argumenten gebruik gemaakt wordt.

3. Bereken de integraal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\, d\theta.$$

Geef duidelijk aan van welke substituties gebruik gemaakt wordt.

4. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+3}\, dx \ \left(= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\sin 2x}{x^2+3}\, dx \right)$$

met behulp van residuenrekening. Geef duidelijk aan over welke contouren geïntegreerd wordt en van welke argumenten gebruik gemaakt wordt.

zie ommezijde

5. Definieer de 2π-periodieke functie $F(t)$ door

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < -\pi/2, \\ 1, & -\pi/2 \leq t \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < t \leq \pi \end{cases}$$

met bijbehorende Fourier coefficienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

zodat

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2\, dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

(a) Bepaal de puntsgewijze som van de reeks

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Geef duidelijk aan van welke argumenten gebruik gemaakt wordt.

(b) Bereken de Fouriercoefficienten c_n, $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bepaal met behulp van (b) de som van de reeks

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

(d) Herschrijf met behulp van (b) de reeks

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

in reële vorm.